

NK・NJの推論規則

- NKの推論規則は、以下の規則全てである。
- NJの推論規則は、以下の規則から**背理法**を除いたものである。

公理

$$\frac{}{\varphi} \text{ axm}$$

(ただし, $\varphi \in \Sigma$)

→に関する規則

$$\frac{\frac{}{\psi} (k) \quad \vdots \quad \frac{\varphi}{\psi \rightarrow \varphi} \rightarrow i(k)}{\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi} \rightarrow e}$$

∧に関する規則

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge i \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge e \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge e$$

∨に関する規則

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee i \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee i \quad \frac{\frac{}{\varphi} (k) \quad \frac{}{\psi} (k) \quad \vdots \quad \frac{\varphi \vee \psi \quad \chi}{\chi} \vee e(k)}{\chi} \vee e(k)$$

⊥と¬に関する規則

$$\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} \perp i / \neg e \quad \frac{\perp}{\varphi} \perp e$$

背理法 (NKのみ)

$$\frac{\frac{}{\varphi} \quad \vdots \quad \frac{\perp}{\neg \varphi} \neg i}{\neg \varphi} \text{ abs}$$

∀に関する規則

$$\frac{\varphi}{\forall x. \varphi} \forall i \quad \frac{\forall x. \varphi}{\varphi[x := t]} \forall e$$

(ただし, まだ解消されていない φ についての仮定に, x が自由変数として現れない)

∃に関する規則

$$\frac{\varphi[x := t]}{\exists x. \varphi} \exists i \quad \frac{\frac{}{\varphi} (k) \quad \vdots \quad \frac{\exists x. \varphi \quad \psi}{\psi} \exists e(k)}{\psi} \exists e(k)$$

(ただし, ψ に, x が自由変数として現れない)

等号の公理・算術の公理

等号の公理

$$\frac{}{t = t} = \text{ref} \qquad \frac{s = t}{t = s} = \text{sym} \qquad \frac{s = t \quad t = u}{s = u} = \text{tra}$$

$$\frac{t_1 = s_1 \quad \cdots \quad t_n = s_n}{t = t[t_1 := s_1, \dots, t_n := s_n]} = \text{term}$$

$$\frac{t_1 = s_1 \quad \cdots \quad t_n = s_n \quad \varphi}{\varphi[t_1 := s_1, \dots, t_n := s_n]} = \text{pred}$$

算術の公理

- ロビンソン算術 **Q** は、以下の (Q1)~(Q8) 公理として持つ
- ペアノ算術 **PA** は、以下の (Q1)~(Q8) および (ind) を公理として持つ

$$(Q1) \quad \forall x. [s(x) \neq 0].$$

$$(Q2) \quad \forall x. \forall y. [(s(x) = s(y)) \rightarrow x = y].$$

$$(Q3) \quad \forall x. [x \neq 0 \rightarrow \exists y. (x = s(y))].$$

$$(Q4) \quad \forall x. [x + 0 = x].$$

$$(Q5) \quad \forall x. \forall y. [x + s(y) = s(x + y)].$$

$$(Q6) \quad \forall x. \forall y. [x \cdot 0 = 0].$$

$$(Q7) \quad \forall x. \forall y. [x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x].$$

$$(Q8) \quad \forall x. \forall y. [x \leq y \leftrightarrow (\exists z. z + x = y)].$$

$$(\text{ind}) \quad \varphi(0) \wedge [\forall x. (\varphi(x) \rightarrow \varphi(s(x))) \rightarrow \forall x. \varphi(x)]$$

ただし、 $\varphi(x)$ は、 x を自由変数として含む算術の論理式である。